

绝密★启用前



2022 年全国硕士研究生招生考试

数学试题及参考答案

（数学一）

（科目代码：301）

海文考研





一、选择题:1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$, 则()

(A) $f(1) = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

(C) $f'(1) = 1$

(D) $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$

【答案】(B)

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \ln x = 0$.

故选(B).

(2) 设函数 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 $f(u)$ 可导, 若 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 (\ln y - \ln x)$, 则()

(A) $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 0$

(B) $f(1) = 0, f'(1) = \frac{1}{2}$

(C) $f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = 1$

(D) $f(1) = 0, f'(1) = 1$

【答案】(B)

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf\left(\frac{y}{x}\right) + xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = yf\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xf\left(\frac{y}{x}\right) + xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = xf\left(\frac{y}{x}\right) + yf'\left(\frac{y}{x}\right),$$

则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 故 $2xyf\left(\frac{y}{x}\right) = y^2 (\ln y - \ln x)$,

则 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$, 令 $\frac{y}{x} = u$, 所以 $f(u) = \frac{1}{2} u \ln u$,

故 $f(1) = 0, f'(1) = \frac{1}{2}$.

故选(B).

(3) 已知数列 $\{x_n\}$, 其中 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则()

(A) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.



(B) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

(C) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.

(D) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.

【答案】(D)

【解析】举反例, 令 $x_n = (-1)^n$ 可排除 ABC.

故选(D).

(4) 已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx$, $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_2 < I_1 < I_3$.

(C) $I_1 < I_3 < I_2$.

(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

【答案】(A)

【解析】 $I_1 = \int_0^1 \frac{\frac{x}{2}}{1+\cos x} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx, I_3 = \int_0^1 \frac{x}{1+\sin x} dx$,

先比较 I_1, I_2 大小

令 $f(x) = \frac{x}{2} - \ln(1+x), x \in (0,1)$ 且 $f(0) = 0$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x-1}{2(1+x)} < 0, \text{ 即 } f(x) \text{ 单调递减, 则 } f(x) < f(0) = 0,$$

即 $\frac{x}{2} < \ln(1+x), x \in (0,1)$, 则 $I_1 < I_2$.

再比较 I_3, I_2 大小

因 $\ln(1+x) < x, \frac{1+\sin x}{2} < 1+\cos x, x \in (0,1)$, 则 $\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} < \frac{x}{1+\sin x}$, 从而 $I_3 > I_2$.

综上所述, 故选(A).

(5) 下述四个条件中, 3 阶矩阵 A 可对角化的一个充分但不必要条件是()

(A) A 有 3 个互不相等的特征值

(B) A 有 3 个线性无关的特征向量

(C) A 有 3 个两两线性无关的特征向量

(D) A 的属于不同特征值的特征向量正交

【答案】(A)





【解析】对于选项(A), 因为 A 有三个不同的特征值, 所以 A 有三个无关的特征向量, 即 A 可相似对角化, 但是 A 可相似对角化, 不一定有三个不同的特征值, 可以有重特征值. 故选(A).

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵, E 为单位矩阵. 若方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则()

(A) 方程组 $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.

(B) 方程组 $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.

(C) 方程组 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 同解.

(D) 方程组 $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 同解.

【答案】(C)

【解析】令 $y = \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = 0$,

所以 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 同解等价于 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = 0$ 同解.

即 $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = Au + Bx = 0 \\ Bx = 0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} \begin{pmatrix} B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = Bu + Ax = 0 \\ Ax = 0 \end{cases}$ 同解.

所以等价于 $\begin{cases} Au = 0 \\ Bx = 0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} Bu = 0 \\ Ax = 0 \end{cases}$ 同解.

因为 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 所以 $\begin{cases} Au = 0 \\ Bx = 0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} Bu = 0 \\ Ax = 0 \end{cases}$ 同解. 所以 C 正确.

(7) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ

的取值范围是()

(A) $\{0, 1\}$

(B) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$

(C) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$

(D) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$

【答案】(C)



【解析】因为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) & (\lambda+1)^2(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

①. 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq -1$ 时,

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 3$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价.

②. 当 $\lambda = 1$ 时

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{可得 } r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 1$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价.

③. 当 $\lambda = -2$ 时

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{可得 } r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 3$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 不等价.

④. 当 $\lambda = -1$ 时

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{可得 } r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3 \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 2$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 不等价.

综上, (C) 正确.

(8) 设随机变量 $X \sim U(0, 3)$, 随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布, 且 X 与 Y 的协方差为 -1, 则

$$D(2X - Y + 1) = (\quad)$$





(A) 1

(B) 5

(C) 9

(D) 12

【答案】(C)

【解析】 $X \sim U(0,3)$, $D(X) = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4}$; $Y \sim P(2)$, $D(Y) = 2$,

因此 $D(2X - Y + 1) = 4D(X) + D(Y) - 2Cov(2X, Y) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 2 - 4 \cdot (-1) = 9$, 故选(C).

(9) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 且 X_1 的 4 阶矩存在, 记 $\mu_k = E(X_1^k)$ ($k=1, 2, 3, 4$),

则由切比雪夫不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$ 有 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq (\quad)$

(A) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$

(B) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

(C) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2}$

(D) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

【答案】(A)

【解析】 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i^2) = E(X_1^2) = \mu_2$,

$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n (E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2) = \frac{1}{n}(\mu_4 - \mu_2^2)$,

根据切比雪夫不等式, $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$, 故选(A).

(10) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 在 $X=x$ 条件下, 随机变量 $Y \sim N(x,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为
()

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】(D)

【解析】法一: 由题知, X 的概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 当 $X=x$ 时, Y 的条件概率密度为

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$, 所以 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{(y-x)^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2}}$,



由二维正态分布的概率密度 $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$ 可知,

$(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 2; \frac{\sqrt{2}}{2})$, 故选(D).

$$\begin{aligned} \text{法二: } EY &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} E(Y|X=x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EXY &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} xe^{-\frac{x^2}{2}} E(Y|X=x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = EX^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EY^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} E(Y^2|X=x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = E(X^2+1) = 2 \end{aligned}$$

故 $Cov(X, Y) = 1$, $D(Y) = 2$

所以 $\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 故选(D).

二、填空题:11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 在点 $(0, 1)$ 的最大方向导数是_____.

【答案】 4

【解析】 $\frac{\partial f}{\partial \tau}\bigg|_{(0,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{(0,1)} \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = (2x, 4y)\bigg|_{(0,1)} \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$= 4\sin \alpha \leq 4$, 其中方向 $\tau = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 故最大值为 4.

(12) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$ _____.

【答案】 4

【解析】 $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int_1^e \frac{2\ln t}{t} \cdot 2tdt = 4t \ln t \bigg|_1^e - 4 \int_1^e t \cdot \frac{1}{t} dt = 4e - 4t \bigg|_1^e = 4.$

(13) 当 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 时, $x^2 + y^2 \leq ke^{x+y}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是_____.



【答案】 $k \geq 2e^{-2}$

【解析】 原式等价于 $(x^2 + y^2)e^{-(x+y)} \leq k$

$$\text{令 } f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$$

$$f'_x = 2xe^{-(x+y)} - (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = (2x - x^2 - y^2)e^{-(x+y)} = 0$$

$$f'_y = 2ye^{-(x+y)} - (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = (2y - x^2 - y^2)e^{-(x+y)} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 2x - x^2 - y^2 = 0 \\ 2y - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

得 $x = y = 1$ 或 $x = y = 0$

$$f(0, 0) = 0, f(1, 1) = 2e^{-2}$$

$$\therefore k \geq 2e^{-2}.$$

(14) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$, 则 $a =$ _____.

【答案】 $a = -1$

$$\text{【解析】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} e^{-(n+1)x}}{\frac{n!}{n^n} e^{-nx}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-x}}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^{-x} \frac{1}{e} = e^{-x-1} < 1$$

故 $x > -1$, $a = -1$.

(15) 已知矩阵 A 和 $E - A$ 可逆, 其中 E 为单位矩阵, 若矩阵 B 满足 $(E - (E - A)^{-1})B = A$, 则

$$B - A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $-E$

【解析】 由题可得,

$$B - (E - A)^{-1}B = A \Rightarrow B - A = (E - A)^{-1}B \Rightarrow (E - A)(B - A) = B$$

$$\Rightarrow (E - A)(B - A) = B - A + A \Rightarrow (E - A - E)(B - A) = A \Rightarrow B - A = -E.$$

(16) 设 A, B, C 为随机事件, 且 A 与 B 互不相容, A 与 C 互不相容, B 与 C 相互独立

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}, \text{ 则 } P(B \cup C | A \cup B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【解析】 } P(B \cup C | A \cup B \cup C) = \frac{P(B \cup C)}{P(A \cup B \cup C)}$$





$$\text{因为 } P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = P(B) + P(C) - P(B)P(C) = \frac{5}{9}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) = \frac{8}{9}$$

$$\text{所以 } P(B \cup C | A \cup B \cup C) = \frac{5}{8}.$$

三、解答题:17~22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 满足条件 $y(1) = 3$ 的解,求曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

【解析】

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx} \left[\int (2 + \sqrt{x}) e^{\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx} dx + C \right] = e^{-\sqrt{x}} \left[\int (2 + \sqrt{x}) e^{\sqrt{x}} dx + C \right] = e^{-\sqrt{x}} (2xe^{\sqrt{x}} + C)$$

$$= 2x + Ce^{-\sqrt{x}}, \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数, 又 } y(1) = 3, \text{ 则 } C = e, \text{ 故 } y(x) = 2x + e^{1-\sqrt{x}}.$$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + e^{1-\sqrt{x}}}{x} = 2, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-\sqrt{x}} = 0, \text{ 则 } y = 2x \text{ 为曲线 } y = y(x) \text{ 的}$$

斜渐近线.

(18) (本题满分 12 分)

$$\text{已知平面区域 } D = \{(x, y) | y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}, \text{ 计算 } I = \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } I &= \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - \sin \theta)^2 d\theta \int_0^2 r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos \theta - \sin \theta)^2 d\theta \int_0^{\frac{2}{\sin \theta - \cos \theta}} r dr \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = 2(\theta - \sin^2 \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \pi = 2\pi - 2. \end{aligned}$$

(19) (本题满分 12 分)

已知 Σ 为曲面 $4x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 的上侧, L 为 Σ 的边界曲线,其正向与 Σ 的正法向量满足右手法则,计算曲线积分

$$I = \int_L (yz^2 - \cos z) dx + 2xz^2 dy + (2xyz + x \sin z) dz.$$

$$\text{【解析】 由斯托克斯公式 } I = \int_L (yz^2 - \cos z) dx + 2xz^2 dy + (2xyz + x \sin z) dz$$



$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 - \cos z & 2xz^2 & 2xyz + x \sin z \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} -2xz dydz + z^2 dxdy$$

$$= \iint_{4x^2+y^2 \leq 1} [-2x\sqrt{1-4x^2-y^2} \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2-y^2}} + 1-4x^2-y^2] dxdy$$

$$= \iint_{4x^2+y^2 \leq 1} 1-12x^2-y^2 dxdy = \frac{\pi}{8} - \iint_{4x^2+y^2 \leq 1} 12x^2+y^2 dxdy$$

令 $X = 2x, Y = y$, 原式化为

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \iint_{X^2+Y^2 \leq 1, X \geq 0, Y \geq 0} 3X^2 + Y^2 dXdY = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 3r^3 \cos^2 \theta + r^3 \sin^2 \theta dr = 0.$$

20 (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有 2 阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充分必要条件是: 对不同实数 a, b , $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

【解析】必要性: 令 $F(x) = (x-a)f(\frac{a+x}{2}) - \int_a^x f(t) dt, F(a) = 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(\frac{a+x}{2}) + (x-a)f'(\frac{a+x}{2}) - f(x) = \frac{1}{2}(x-a)f'(\frac{a+x}{2}) - \left[f(x) - f(\frac{a+x}{2}) \right] \\ &= \frac{1}{2}(x-a)f'(\frac{a+x}{2}) - \frac{1}{2}(x-a)f'(\xi) = \frac{1}{2}(x-a) \left[f'(\frac{a+x}{2}) - f'(\xi) \right], \text{ 其中 } \xi \in (\frac{a+x}{2}, x) \end{aligned}$$

因为 $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x)$ 单调递增 $\Rightarrow F'(x) \leq 0 \Rightarrow F(x)$ 单调递减, $F(b) \leq F(a) = 0$, 故不等式成立;

充分性: (反证法) 假设 $\exists x_0$, 使得 $f''(x_0) < 0$, 由 $f''(x)$ 的连续性以及极限的局部保号性可得:

$\exists x_0$ 的小邻域 (c, d) 使得 $f''(x) < 0$, 对于 $\forall x \in (c, d)$, 从而 $-f''(x) > 0$;

$$\text{令 } G(x) = \int_c^x f(t) dt - (x-c)f(\frac{c+x}{2}), \quad G(c) = 0,$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= f(x) - f(\frac{c+x}{2}) - \frac{1}{2}(x-c)f'(\frac{c+x}{2}) = \frac{1}{2}(x-c) \left[f'(\eta) - f'(\frac{c+x}{2}) \right], \text{ 其中 } \eta \in (\frac{c+x}{2}, x) \\ &= \frac{1}{2}(x-c)(\eta - \frac{c+x}{2})f''(\gamma) < 0, \text{ 其中 } \gamma \in (\frac{c+x}{2}, \eta), \end{aligned}$$



故 $G(x)$ 单调递减, 所以 $G(d) < G(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{d-c} \int_c^d f(t)dt < f(\frac{c+d}{2})$, 这个与题设条件

$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 矛盾, 故对于 $\forall x$, 有 $f''(x) \geq 0$. 证毕.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j$.

- (1) 写出 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵;
- (2) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;
- (3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

【解析】(1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ijx_i x_j = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$,

则二次型矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

(2) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-4 & -6 \\ -3 & -6 & \lambda-9 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-14) = 0$, 特征值为 $\lambda_1 = 14, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\lambda_1 = 14$ 时, $(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$;

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 时, 由 $(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = (-2, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (-3, -6, 5)^T$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已经正交, 将它们单位化得到

$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)^T$, $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T$, $\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3, -6, 5)^T$, 令正交矩阵 $Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$,

经过正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, 二次型化为 $f(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2$.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 时, 则 $f(y_1, y_2, y_3) = 14y_1^2 = 0$ 故 $y_1 = 0$.



$$\text{则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ 所以 } \begin{cases} x_1 = -2y_2 - 3y_3 \\ x_2 = y_2 - 6y_3 \\ x_3 = 5y_3 \end{cases} \quad y_2, y_3 \text{ 为任意实数.}$$

(22) (本题满分 12 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 且两样本相互独立, 其中 $\theta (\theta > 0)$ 是未知参数. 利用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并求 $D(\hat{\theta})$.

【解析】由题知, X 的概率密度为

$$f_X(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$Y \text{ 的概率密度为 } f_Y(y; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{y}{2\theta}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{令 } L = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta) \prod_{j=1}^m f_Y(y_j; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \prod_{j=1}^m \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{y_j}{2\theta}} \quad (x_i > 0, y_j > 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m),$$

$$\text{则 } \ln L = \sum_{i=1}^n (-\ln \theta - \frac{x_i}{\theta}) + \sum_{j=1}^m (\ln \frac{1}{2} - \ln \theta - \frac{y_j}{2\theta})$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{d \ln L}{d \theta} &= \sum_{i=1}^n (-\frac{1}{\theta} + \frac{x_i}{\theta^2}) + \sum_{j=1}^m (-\frac{1}{\theta} + \frac{y_j}{2\theta^2}) \\ &= -\frac{m+n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta^2} + \sum_{j=1}^m \frac{y_j}{2\theta^2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m y_j \right) \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\theta} = \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m Y_j \right)$$

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{(m+n)^2} \left(\sum_{i=1}^n DX_i + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m DY_j \right) = \frac{1}{(m+n)^2} \left(nDX + \frac{1}{4} mDY \right)$$

$$= \frac{1}{(m+n)^2} \left(n\theta^2 + \frac{1}{4} m4\theta^2 \right) = \frac{\theta^2}{m+n}.$$